НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ПОЛТАВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА ІМЕНІ ЮРІЯ КОНДРАТЮКА»

Кафедра автомобільних доріг, геодезії, землеустрою
та сільських будівель

М Е Т О Д И Ч Н І   В К А З І В К И

для виконання
практичних робіт
з дисципліни

«Математична обробка геодезичних вимірювань»

ПОЛТАВА – 2020

Практична робота 1
Основні поняття теорії ймовірностей

Задача 1.

Кожна з букв «К», «О», «Х», «И», «Б», «А», «П» написана на окремій картці. Картки перемішують, виймають навмання по одній і розкладають в порядку їх появи. Знайти ймовірність складання з карток слова «ПОХИБКА».

Ймовірність появи нашої події – складання з навмання вийнятих карток слова «ПОХИБКА» визначається згідно класичного визначення ймовірності:

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

де m – число елементарних наслідків, що сприяють появі події А;

n – число всіх рівноможливих наслідків.

Число всіх рівноможливих комбінацій ***n*** із семи букв дорівнює числу перестановок із семи елементів:

$$P = n!$$

Для нашого завдання

$$n = P_7 = n! = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$$

Існує лише одна комбінація, при якій із навмання вибраних карток може з'явитись слово «ПОХИБКА» (назвем цю подію A), тобто $m=1$.

Отже, ймовірність появи слова «ПОХИБКА» буде дорівнювати:

$$p(A) = \frac{1}{5040}.$$

Задача 2.

Яка ймовірність складання слова «БАК», якщо навмання в порядку їх появи вибирають три картки з буквами попередньої задачі 1.

Число сприятливих випадків, як і в попередній задачі $m=1$ (існує лише одна комбінація із заданих букв, яка складе необхідне слово).

Число всіх можливих випадків виймання трьох карток із семи визначається за формулою числа розміщень:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

В нашому випадку:

$$n = A_n^k = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{4! 5 \cdot 6 \cdot 7}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210.$$

Таким чином, ймовірність складання слова «БАК» із семи елементів при одночасному вийманні трьох карток дорівнює:

$$p(A) = \frac{1}{210}$$

Задача 3.

В урні знаходиться 14 кульок: 4 – білих, 3 чорних , 2 жовтих і 5 червоних. Яка ймовірність того, що одна навмання взята з урни кулька виявиться:

А – білою;

Б - чорною;

В – жовтою або червоною.

Яка ймовірність того, що дві взяті навмання кульки виявляться:

Г – білими.

Для розв’язання даної задачі використовуємо формулу класичного визначення ймовірності:

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

Подія А – навмання взята з урни біла кулька. З урни можна взяти будь-яку з 14-ти кульок. Отже, число усіх можливих випадків *n=4*. Число сприятливих наслідків для появи події А – *m=4* (загальне число білих кульок в урні). Таким чином, ймовірность появи білої кульки *p(A)* :

$$p(A) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}\ .$$

Аналогічно визначаємо ймовірність появи чорної кульки (подія Б) *p(Б)*:

$$p(Б) = \frac{3}{14}.$$

Ймовірність появи події В (жовта або червона кульки) знаходиться за теоремою суми несумісних подій: ймовірність суми двох чи декількох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій, тобто:

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$$

Згідно умов задачі (наявності жовтих та червоних кульок в урні):

$$p(B) = \frac{2}{14} + \frac{5}{7} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}.$$

Ймовірність появи події Г (дві навмання вийняті кульки виявляться білими) визначаємо наступним чином. Число всіх можливих випадків (кількість комбінацій із загального числа кульок - 14, по дві) знаходимо як число комбінацій з ***n*** елементів по ***k*** :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$n = C_{14}^2 = \frac{14!}{2!(14-2)!} = \frac{12!\cdot 13\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 12!} = 91.$$

Загальне число подій, які сприяють появі двох білих кульок визначається як кількість можливих комбінацій із чотирьох наявних білих кульок по дві:

$$m = C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{2!\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 2!} = 6.$$

Таким чином, ймовірність появи події Г дорівнює:

$$p(Г) = \frac{6}{91}.$$

Задача 4.

Гральний кубик кидають 4 рази. Яка ймовірність того, що грань з 2-ма очками випаде 4 рази підряд.

Ймовірність випадання грані з 2-ма очками під час одного підкидання кубика p=1/6. Кожна із 4-х подій кидання грального кубика є незалежною подією. Задана умовою задачі ймовірність знаходиться згідно формули множення незалежних подій (ймовірність сумісної появи незалежних подій – добуток подій – дорівнює добутку їх ймовірностей):

$$p(C) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot ... \cdot p(A_n)$$

Згідно умов нашої задачі:

$$p = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296} \ .$$

Задача 5.

Ймовірність влучення у мішень першого стрілка дорівнює 0,6, а другого – 0,8. Знайти ймовірність влучення у мішень хоча б одного стрілка з одного пострілу.

Позначимо влучення у мішень першого стрілка як подію А, а другого – як подію В. Події А і В є сумісні, вони можуть з'явитись одночасно при одному випробуванні. Тому, для вирішення даної задачі потрібно використати формулу ймовірності суми для сумісних подій (ймовірність суми сумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей без ймовірності їх сумісної появи):

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(A \cdot B)$$

Події А і В є незалежні, тому

$$p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B) \ .$$

Вирахуємо ймовірності подій, що входять у формулу ймовірності суми сумісних подій:

$$p(A) = 0{,}6 \ ,$$

$$p(B) = 0{,}8 \ ,$$

$$p(A \cdot B) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48 \ .$$

Тоді:

$$p(A + B) = 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}48 = 0{,}92$$

Задача 6.

В урні знаходиться 5 білих і 7 чорних куль.

А – Знайти ймовірність послідовної появи двох білих куль за умови, що перша куля повертається в урну.

Б - Знайти ймовірність послідовної появи двох білих куль за умови, що перша куля не повертається назад в урну.

А. Нехай подія А – перший раз взята навмання біла кулька з урни; подія В – другий раз взята навмання біла кулька з урни.

Ймовірність події А згідно класичного визначення ймовірності:

$$p(A) = \frac{5}{12}$$

Ймовірність події В після того як першу кульку повернули назад в урну буде такою ж як і події А (загальна кількість кульок і їх розподіл за кольорами лишився незмінним):

$$p(B) = \frac{5}{12}$$

Події А і В є незалежні між собою, а ймовірність послідовної появи двох білих куль визначається як ймовірність їх добутку:

$$p(AB) = p(A)p(B) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{144} .$$

Б. Аналогічно першій частині задачі позначимо, що подія А – перший раз взята навмання біла кулька з урни; подія В – другий раз взята навмання біла кулька з урни.

$$p(A)=\frac{5}{12}$$

Подія B залежить від події A, оскільки біла кулька не повертається назад до урни. В результаті в урні змінилась загальна кількість кульок (11) і їх розподіл за кольорами (4 білі і 7 чорних). Тому ймовірність послідовної появи двох білих кульок знаходять за формулою добутку залежних подій:

$$p(AB)=p(A)p(B/A),$$

де $p(B/A)$ - ймовірність події B за умови, що подія A відбулась.

Оскільки $p(B/A)=\frac{4}{11}$, то ймовірність сумісної появи двох кульок дорівнює:

$$p(AB)=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}=\frac{20}{131}.$$

Задача 7.

У першому ящику 20 деталей, з яких 15 стандартних. У другому ящику 10 деталей, з яких 9 стандартних. З другого ящика беруть навмання одну деталь і перекладають її до першого ящика. Знайти імовірність того, що взята після цього навмання деталь з першого ящика виявиться стандартною.

Позначимо події: A – з першого ящика взято стандартну деталь, B_1 – з другого ящика переклали до першого стандартну деталь, B_2 - з другого ящика переклали до першого нестандартну деталь. Згідно умов задачі, з першого ящика можна взяти деталь лише після того, як здійсниться подія B_1 або B_2. Події B_1 і B_2 несумісні (поява однієї з них виключає появу іншої в одному випробовуванні) і складають повну групу подій (сума ймовірностей цих подій дорівнює одиниці), а подія A може з'явитись лише сумісно з однією з них. Тому, для знаходження ймовірності події A слід використати формулу повної ймовірності:

$$p(A)=\sum_{k=1}^{n}p(B_k)\cdot p(A/B_k)=p(B_1)\cdot p(A/B_1)+p(B_2)\cdot p(A/B_2)+\ldots+p(B_k)\cdot p(A/B_k)$$

,

Для нашого конкретного випадку:

$$p(A)=p(B_1)\cdot p(A/B_1)+p(B_2)\cdot p(A/B_2)$$

де $p(A/B_1)$ і $p(A/B_2)$ умовні ймовірності події A за умови появи відповідно події B_1 або B_2.

Ймовірність того, що з другого ящика буде взято стандартну чи нестандартну деталі вираховується за формулою класичного визначення ймовірності і дорівнює відповідно:

$$p(B_1)=\frac{9}{10};$$

$$p(B_2)=\frac{1}{10}.$$

Вирахуємо умовні ймовірності того, що взята з першого ящика деталь буде стандартною після того, як з другого ящика до першого переклали одну деталь. Ця деталь може бути стандартною (B_1) або нестандртною (B_2). При цьому, у першому ящику загальна кількість деталей збільшиться на одну і становитиме 21 штуку.

$$p(A/B_1)=\frac{16}{21};$$

$$p(A/B_2)=\frac{15}{21}.$$

Отже, ймовірність появи події А дорівнює:

$$p(A)=\frac{9}{10}\cdot\frac{16}{21}+\frac{1}{10}\cdot\frac{15}{21}=\frac{144+15}{210}=\frac{159}{210}=\frac{53}{70}\ .$$

Задача .

Студент здає тестову контрольну роботу, яка складається з 5-ти запитань. На кожне із запитань є три відповіді, з яких одна вірна, а дві невірні. Студент не готовий до контрольної роботи і вибирає відповіді на запитання навмання. Вирахувати ймовірність того, що студент дасть правильні відповіді на п'ять запитань, чотири, три, два, одне, не дасть жодної правильної відповіді. Вирахувати ймовірність отримання студентом позитивної оцінки (правильні відповіді на три, чотири і п'ять запитань) і негативної (правильні відповіді на два, одне запитання і жодної правильної відповіді).

Задачу розв'язуємо за формулою Бернуллі, яка дозволяє знайти ймовірність появи події А ***m*** разів за ***n*** випробовувань:

$$P_n(m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m},$$

де C_n^m - число сполучень з ***n*** елементів по ***m***, ***p*** – ймовірність появи події *A*, ***q*** – ймовірність появи події $\overline{A}$ протилежної події *A.*

Для взаємопротилежних подій

$$p+q=1.$$

Ймовірність правильної відповіді на одне запитання *p=1/3,* ймовірність неправильної відповіді на одне запитання *q=2/3*.

1. Ймовірність правильної відповіді на усі п'ять завдань:

$$P_5(5)=C_5^5\cdot p^5q^0=\frac{5!}{5!\,0!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{243}.$$

2. Ймовірність правильної відповіді на чотири завдання:

$$P_5(4)=C_5^4\cdot p^4q^1=\frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{10}{243}\approx\frac{1}{24}.$$

3. Ймовірність правильної відповіді на три завдання:

$$P_5(3)=C_5^3\cdot p^3q^2=\frac{5!}{3!\,2!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}\approx\frac{1}{6}$$

4. Ймовірність правильної відповіді на два завдання:

$$P_5(2)=C_5^2\cdot p^2q^3=\frac{5!}{2!\,3!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}\approx\frac{1}{3}.$$

5. Ймовірність правильної відповіді на одне завдання:

$$P_5(1)=C_5^1\cdot p^1q^4=\frac{5!}{1!\,4!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}\approx\frac{1}{3}.$$

6. Ймовірність жодної правильної відповіді на завдання:

$$P_5(0)=C_5^0\cdot p^0q^5=\frac{5!}{0!\,5!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}\approx\frac{1}{8}.$$

Ймовірність отримання позитивної оцінки (згідно теореми додавання несумісних подій):

$$P_5(5)+P_5(4)+P_5(3)=\frac{1}{243}+\frac{10}{243}+\frac{40}{243}=\frac{51}{243}\approx\frac{1}{5}.$$

Ймовірність отримання негативної оцінки (згідно теореми додавання несумісних подій):

$$P_5(2)+P_5(1)+P_5(0)=\frac{80}{243}+\frac{80}{243}+\frac{32}{243}=\frac{192}{243}\approx\frac{4}{5}.$$

Задача 10.

Довжина лінії вимірюється 20 разів. Імовірність того, що значення виміряної довжини буде більше ніж її істинне значення дорівнює 0,6. Знайти найімовірнішу кількість з усіх виміряних ліній, коли їх довжина є більшою за істинне значення.

Найімовірніше число появи події при багаторазових випробовуваннях $\boldsymbol{k_0}$ визначається за наступною формулою:

$$np-q\le k_0\le np+p,$$

де n – кількість випробовувань, p – ймовірність появи необхідної події, q – ймовірність появи протилежної до необхідної події ($p+q=1$).

За умовами нашої задачі n =20, p = 0,6, $q=1-p=0{,}4$.

Тоді:

$$np-q\le k_0\le np+p,$$

$$11{,}6\le k_0\le 12{,}6.$$

Отже, $\boldsymbol{k_0}$ =12.

Вихідні дані до лабораторної роботи 1.

Задача 1. Кожна з букв ______________________________ написана на окремій картці. Картки перемішують, виймають навмання по одній і розкладають в порядку їх появи. Знайти ймовірність складання з карток слова ____________________.

Номер варіанту	Букви	Слово
1	Р,У,Л,Е,Т,К,А	рулетка
2	М,Е,Н,З,У,Л,А	мензула
3	Р,Е,Й,К,А	рейка
4	К,У,Т	кут
5	З,Н,А,К	знак
6	М,Е,Т,О,Д	метод
7	С,И,Г,Н,А,Л	сигнал
8	П,Л,А,Н,Ш,Е,Т	планшет
9	Р,І,К	рік
10	З,А,К,О,Н	закон
11	Ф,О,Р,М,У,Л,А	формула
12	З,В,І,Т	звіт
13	Б,А,З,И,С	базис
14	Л,О,Г,А,Р,И,Ф,М	логарифм
15	Е,Л,І,П,С,О,Ї,Д	еліпсоїд
16	Ф,І,Г,У,Р,А	фігура
17	М,Е,Р,И,Д,І,А,Н	меридіан

Задача 2. Яка ймовірність складання числа ___________, якщо навмання в порядку їх появи вибирають _________ картки з цифрами__________________________.

Номер варіанту	`Число	Цифри
1	123	1,2,3,4,5,6,7
2	5692	2,3,4,5,6,7,8,9
3	6701	0,1,2,5,6,7,8
4	78	4,6,7,8,9
5	478	1,2,3,4,5,6,7,8
6	14875	1,3,4,5,7,8
7	5790	1,4,5,6,7,8,9
8	612	1,2,5,6,7
9	257	1,2,3,5,6,7
10	56	5,6,7,8
11	98721	1,2,5,6,7,8,9
12	680	1,2,5,6,7,8
13	1045	0,1,2,3,4,5,6
14	467	3,4,5,6,7
15	921	1,2,3,7,8,9
16	5671	1,2,5,6,7,8
17	67	3,4,5,6,7,8

Задача 3. В урні знаходиться ___ кульок: ___ білих, ___ чорних , ___ жовтих і ___ червоних. Яка ймовірність того, що одна навмання взята з урни кулька виявиться:

А – білою;

Б - чорною;

В – жовтою або червоною.

Яка ймовірність того, що дві взяті навмання кульки виявляться:

Г – білими.

Номер варіанту	Загальна кількість кульок	З них			
		Білих	Чорних	жовтих	червоних
1	12	4	3	1	4
2	14	3	3	5	4
3	14	3	2	4	5
4	18	5	4	6	3
5	15	5	1	2	7
6	14	3	4	2	5
7	15	4	3	1	7
8	12	3	2	1	6
9	14	4	3	2	5
10	14	3	3	4	4
11	12	4	3	2	3
12	13	5	2	3	3
13	16	3	4	5	4
14	13	5	1	2	5
15	12	3	4	1	4
16	13	4	2	3	4
17	16	5	5	4	2

Задача 4. Гральний кубик підкидають ___ рази. Яка ймовірність того, що грань (ні) з ____________________________ випаде (уть) ______ рази підряд.

Номер варіанту	Число підкидань Кубика	Випадання грані (граней) кубика
1	2	4
2	3	3 або 4
3	4	парних цифр
4	2	1 або 2 або 4
5	3	6
6	4	непарних цифр
7	2	5 або 6
8	3	4
9	4	3
10	2	3 або 4 або 5 або 6
11	3	2
12	4	3 або 4
13	2	1 або 2 або 3 або 4
14	3	кратних числу 3
15	4	кратних числу 2
16	3	3
17	4	непарних цифр

Задача 5. Ймовірність влучення у мішень першого стрілка дорівнює _______, а другого –_______. Знайти ймовірність влучення у мішень хоча б одного стрілка з одного пострілу.

Номер варіанту	Ймовірність влучення в мішень 1-го стрілка	Ймовірність влучення в мішень 2-го стрілка
1	0,4	0,9
2	0,6	0,8
3	0,8	0,7
4	0,9	0,6
5	0,8	0,5
6	0,7	0,4
7	0,6	0,3
8	0,5	0,4
9	0,4	0,6
10	0,3	0,5
11	0,4	0,7
12	0,5	0,8
13	0,6	0,9
14	0,7	0,8
15	0,8	0,7
16	0,9	0,5
17	0,5	0,8

Задача 6. В урні знаходиться ____ білих і _____ чорних куль.

А – Знайти ймовірність послідовної появи двох білих куль за умови, що перша куля повертається в урну.

Б - Знайти ймовірність послідовної появи двох білих куль за умови, що перша куля не повертається назад в урну.

Варіант	Білих куль	Чорних куль
1	10	8
2	12	12

3	9	11
4	4	8
5	5	7
6	8	2
7	9	4
8	12	26
9	9	9
10	3	10
11	5	8
12	12	4
13	7	6
14	6	14
15	4	12
16	9	10
17	12	8

Задача 8. У першому ящику ____ деталей, з яких _____ стандартних. У другому ящику ____ деталей, з яких _____ стандартних. З другого ящика беруть навмання одну деталь і перекладають її до першого ящика. Знайти імовірність того, що взята після цього навмання деталь з першого ящика виявиться стандартною.

Номер Варіанту	Перший ящик		Другий ящик	
	Число деталей	з них стандартних	Число деталей	З них стандартних
1	18	15	12	10
2	17	14	15	13
3	16	14	14	10
4	15	12	13	12
5	20	15	10	8
6	21	14	9	7
7	23	21	8	5
8	19	15	11	10
9	18	16	12	9
10	17	13	13	9
11	12	8	12	9
12	14	11	10	8
13	11	9	15	13
14	13	10	14	11
15	15	13	9	8
16	16	12	11	9
17	12	9	10	8

Задача 9. Студент здає тестову контрольну роботу, яка складається з ________ запитань. На кожне із запитань є _______ відповіді, з яких одна вірна, а інші ______ невірні. Студент не готовий до контрольної роботи і вибирає відповіді на запитання навмання. Вирахувати ймовірність того, що студент дасть правильні відповіді на________________________запитань.

Номер варіанту	Кількість запитань	Кількість відповідей на кожне запитання	Число правильних відповідей
1	4	3	0, 2
2	5	4	1, 5
3	6	5	2, 3
4	7	5	3, 5

5	6	4	1, 4
6	5	3	0, 3
7	4	4	1, 3
8	5	5	1, 4
9	6	4	0, 5
10	7	3	2, 6
11	6	3	2, 6
12	5	4	2, 4
13	4	5	1, 3
14	5	3	1, 4
15	4	4	0, 4
16	7	4	3, 6
17	6	3	0, 4

Практична робота 2.

Основні поняття теорії похибок. Властивості випадкових похибок.

Критерії для оцінки точності результатів вимірювань

Для оцінки точності результатів вимірювань прийнято такі критерії: середня похибка, ймовірна похибка та середньоквадратична похибка.

Середньою похибкою θ називається середнє арифметичне з абсолютних значень істинних похибок ***Δ_i*** *(i=1,…,n)* результатів вимірювань:

$$\theta = \pm \frac{\sum_{i=1}^{n} |\Delta_i|}{n} = \pm \frac{[|\Delta|]}{n} \quad . \tag{2.1}$$

Істинною похибкою Δ_i називається різниця між виміряним значенням величини l_i та її істинним значенням *L*:

$$\Delta_i = l_i - L \tag{2.2}$$

Абсолютним варіаційним рядом випадкових похибок послідовність істинних похибок, які розміщені в порядку їх зростання або зменшення за абсолютною величиною.

Ймовірною (вірогідною) похибкою ρ називається таке значення абсолютного варіаційного ряду, яке ділить даний ряд на дві рівні за обсягом частини.

Середньою квадратичною похибкою m називається величина, дорівнює кореню квадратному із середнього арифметичного квадратів істинних похибок:

$$m = \pm \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2}{n} \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} \tag{2.3}$$

На основі експериментальних досліджень випадкових похибок встановлено такі емпіричні спостереження між переліченими похибками:

$$\theta \approx \pm\frac{4}{5}m \tag{2.4}$$

$$\rho \approx \pm\frac{2}{3}m \tag{2.5}$$

Найкращим критерієм для оцінки точності є середня квадратична похибка. Вона має такі переваги над середньою та ймовірною похибками:

1. Середня квадратична похибка є досить чутливою мірою точності, оскільки на її величину сильніше впливають великі за величиною випадкові похибки, що в основному і визначають надійність результатів вимірювань.

2. Середня квадратична похибка вже при деякій відносно не дуже великій кількості вимірювань набуває сталого значення і в подальшому при збільшенні кількості вимірювань змінюється дуже повільно.

3. За величиною середньої квадратичної похибки можна знайти граничну похибку $\Delta_{гран.}$ – таке найбільше за абсолютною величиною значення випадкової похибки, яке ще може з'явитись при даних умовах вимірювань:

$$\Delta_{гран.}=3m \tag{2.6}$$

Якщо кількість вимірювань є незначною, то:

$$\Delta_{гран.}=2m \tag{2.7}$$

4. Знаючи середні квадратичні похибки якихось величин, можна легко визначити середні квадратичні похибки інших величин, функціонально пов'язаних із ними.

Властивості випадкових похибок

Випадковими похибками називаються такі похибки, абсолютне значення яких у процесі вимірювання довільної величини змінюється без всякої закономірності.

Властивості випадкових похибок:

1. При даних умовах вимірів випадкові похибки за абсолютною величиною лишаються завжди меншими за якесь граничне значення.

2. Малі за абсолютною величиною похибки зустрічаються частіше ніж великі.

3. Додатні похибки з'являються так само часто, як і рівні їм щодо абсолютної величини від'ємні похибки.

4. Середнє арифметичне з випадкових похибок результатів вимірів однієї величини прямує до нуля при необмеженому зростанні числа вимірів.

5. У ряді випадкових похибок при переході від однієї похибки до сусідньої не повинно бути помітно ніякої закономірності в появі похибок щодо їх величини і знака.

Абсолютні та відносні похибки

Істинна, середня, ймовірна та середньоквадратична похибки є абсолютними ***похибками***. Розмірність абсолютної похибки збігається з розмірністю випадкової величини. Часто при вимірюванні лінійних величин та площ використовують відносні похибки. ***Відносні похибки*** – безрозмірні величини, які обчислюються відношенням абсолютних похибок до виміряного значення якоїсь величини. В чисельнику відносної похибки завжди стоїть одиниця, а знаменник заокруглюють, як правило, до двох значущих цифр.

Приклад 1.

У поданій нижче таблиці наведено нев'язки $\boldsymbol{\Delta_i}$ суми 45-ти трикутників тріангуляційної мережі. Розглядаючи нев'язки як істинні похибки суми виміряних кутів кожного з трикутників знайти:

1. Середню похибку $\boldsymbol{\theta}$ нев'язки одного трикутника.

2. Ймовірну похибку $\boldsymbol{\rho}$ нев'язки одного трикутника.

3. Середню квадратичну похибку $\boldsymbol{m}$ нев'язки одного трикутника.

4. Граничну похибку $\boldsymbol{\Delta_{гран.}}$ нев'язки одного трикутника.

5. Перевірити існуючі співвідношення між середньою, ймовірною та середньоквадратичною похибками.

6. Перевірити на основі приведених у таблиці експериментальних даних властивості випадкових похибок.

№	Δ	Δ^2	№	Δ	Δ^2	№	Δ	Δ^2
1	-0",1	0,01	16	-0",5	0,25	31	3",5	12,25
2	1,2	1,44	17	2,9	8,41	32	-1,5	2,25
3	-0,9	0,81	18	-4,4	19,36	33	2,9	8,41
4	0,1	0,01	19	4,7	22,09	34	3,3	10,89
5	5,6	31,36	20	-1,4	1,96	35	-0,8	0,64
6	-3,9	15,21	21	-0,2	0,04	36	-1,6	2,56
7	0,6	0,36	22	-3,5	12,25	37	-1,0	1,00
8	-1,1	1,21	23	4,6	21,16	38	2,1	4,41
9	-0,5	0,25	24	1,2	1,44	38	-4,4	19,36
10	-2,0	4,00	25	-2,8	7,84	40	0,6	0,36
11	-0,8	0,64	26	2,0	4,00	41	1,0	1,00
12	0,9	0,81	27	2,0	4,00	42	1,5	2,25
13	-1,9	3,61	28	-0,4	0,16	43	2,7	7,29
14	1,8	3,24	29	-2,9	8,41	44	1,2	1,44
15	3,2	10,24	30	-4,1	16,81	45	1,5	2,25

1. Середню похибку $\boldsymbol{\theta}$ нев'язки одного трикутника знаходимо за формулою (2.1):

$$\theta = \pm\frac{\left[|\Delta|\right]}{n} = \pm\frac{91{,}8}{45} = \pm 2'',04$$

*де |**Δ**| - абсолютні значення істинних похибок нев'язок;*

n – загальна кількість нев'язок трикутників.

*2. Для знаходження ймовірної похибки **ρ** нев'язки одного трикутника складаємо абсолютний варіаційний ряд випадкових похибок з усіх отриманих нев'язок трикутників склавши послідовність похибок у порядку їх зростання за абсолютною величиною.*

№ з/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\lvert\Delta_i\rvert$	0,1	0,1	0,2	0,4	0,5	0,5	0,6	0,6	0,8	0,8	0,9	0,9	1,0	1,0	1,1
№ з/п	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\lvert\Delta_i\rvert$	1,2	1,2	1,2	1,4	1,5	1,5	15	1,6	1,8	1,9	2,0	2,0	2,0	2,1	2,7
№ з/п	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
$\lvert\Delta_i\rvert$	2,8	2,9	2,9	2,9	3,2	3,3	3,5	3,5	3,9	4,1	4,4	4,4	4,6	4,7	5,6

Ймовірною похибкою однієї нев'язки трикутника буде таке значення абсолютного варіаційного ряду випадкових похибок, яке ділить його на дві рівні за обсягом частини (23-є значення варіаційного ряду).

$$\rho = \pm\ 1'',6.$$

*3. Середню квадратичну похибку **m** нев'язки одного трикутника знаходимо за формулою (2.3):*

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \pm\sqrt{\frac{277{,}74}{45}} = \pm 2'',48,$$

де [Δ^2] – сума квадратів істинних похибок усіх трикутників вихідного ряду спостережень.

*4. Гранична похибка **$\Delta_{гран.}$** нев'язки одного трикутника знаходиться за формулою (2.6):*

$$\Delta_{гран.} = \pm 3m = \pm 3\cdot 2'',48 = \pm 7'',44.$$

Жодна істинна похибка нашого ряду спостережень не перевищує граничне значення.

5. Перевіряємо чи виконуються співвідношення (2.4) і (2.5) між середньою та ймовірною похибками з однієї сторони та середньоквадратичною похибкою з іншої на основі наступних рівнянь:

$$\theta \approx \pm\frac{4}{5}m \approx \pm\frac{4}{5}2'',48 = \pm 1'',98;$$

$$\rho \approx \pm\frac{2}{3}m \approx \pm\frac{2}{3}2'',48 = \pm 1'',65.$$

Вирахувані за величиною середньої квадратичної похибки середня та ймовірна похибки ($\theta \approx \pm 1'',98$, $\rho \approx \pm 1'',65$) приблизно дорівнюють їх значенням, які отримані безпосередньо із вихідного ряду спостережень ($\theta = \pm 2'',04$, $\rho = \pm 1'',6$).

6. Перевіримо усі властивості випадкових похибок на основі наших експериментальних даних.

6.1. При даних умовах вимірів випадкові похибки за абсолютною величиною лишаються завжди меншими за якесь граничне значення.

Найбільша похибка з усього ряду нев'язок трикутників 5",6 не перевищує значення вирахуваної граничної похибки $\Delta_{гран.} = \pm 3m = \pm 7'',44$.

6.2. Малі за абсолютною величиною похибки зустрічаються частіше ніж великі.

Вирахуємо кількість похибок, які потрапляють в інтервали з кроком 0,5m в залежності від їх величини.

№ з/п	Інтервал в m	Інтервал в кут. сек.	Кількість похибок
1	$0 \le \|\Delta\| \le 0,5m$	$0 \le \|\Delta\| \le 1,2$	18
2	$0,5m < \|\Delta\| \le 1,0m$	$1,2 < \|\Delta\| \le 2,5$	11
3	$1,0m < \|\Delta\| \le 1,5m$	$2,5 < \|\Delta\| \le 3,7$	9
4	$1,5m < \|\Delta\| \le 2,0m$	$3,7 < \|\Delta\| \le 5,0$	6
5	$2,0m < \|\Delta\| \le 2,5m$	$5,0 < \|\Delta\| \le 6,2$	1
6	$2,5m < \|\Delta\| \le 3,0m$	$6,2 < \|\Delta\| \le 7,4$	0

Друга властивість випадкових похибок виконується, оскільки малі за величиною нев'язки зустрічаються частіше ніж великі.

6.3. Додатні похибки з'являються так само часто, як і рівні їм щодо абсолютної величини від'ємні похибки.

Загальна кількість додатних похибок дорівнює 23, а загальна кількість від'ємних – 22. Сума усіх додатних похибок дорівнює 43",0. Сума усіх від'ємних похибок дорівнює 48",8.

6.4. Середнє арифметичне з випадкових похибок результатів вимірів однієї величини прямує до нуля при необмеженому зростанні числа вимірів.

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{43,0 - 48,8}{45} = \frac{-5,8}{45} = -0'',13$$

Середнє арифметичне з усіх похибок вимірювання суми кутів трикутників є малою величиною.

6.5. У ряді випадкових похибок при переході від однієї похибки до сусідньої не повинно бути помітно ніякої закономірності в появі похибок щодо їх величини і знака.

Жодних закономірностей в появі похибок щодо їх величини і знака в представленому ряді експериментальних даних не виявлено.

Випадкові похибки повинні підлягати нормальному закону розподілу. Для перевірки цієї гіпотези потрібно вирівняти наш експериментальний ряд (підібрати теоретичну криву нормального розподілу, яка б найкращим чином відображала статистичний розподіл) і перевірити правдоподібність цієї гіпотези на основі критерію згоди (див. лабораторну роботу №7).

Приклад 2.

1. Вирахувати відносну похибку довжини лінії s=279,97м, якщо її середньоквадратична похибка вимірювання дорівнює m_s*=0,12м.*

2. Вирахувати відносну похибку площі земельної ділянки P=56370м^2*, якщо вона виміряна із середньоквадратичною похибкою* m_P*=1,5м*^{2}*.*

1. $\frac{m_S}{s} = \frac{0,12}{297,97} = \frac{1}{2500}$.

2. $\frac{m_P}{P} = \frac{1,5}{56370} = \frac{1}{38000}$.

Вихідні дані до практичної роботи 2.

Завдання 1.

На основі таблиці нев'язок 45-ти трикутників тріангуляційної мережі, яка наведена у прикладі 1 розв'язати усі шість пунктів. При цьому, величини нев'язок 1-40 взяти з прикладу 1, а 41-45 вирахувати згідно таких співвідношень:

41 – (-0,1"·n);
42 – (0,1"·n);
43 – (-0,2"·n);
44 – (0,3"·n);
45 – (0,2"·n),
де n – порядковий номер студента в списку групи.

Завдання 2.

Знайти відносні похибки виміряних довжин лінії і площі земельної ділянки, які наведені в прикладі 2. Значення довжини лінії, площі земельної ділянки та їх середньоквадратичні похибки отримати з наступних співвідношень:

1. $s = (1314,88 + 200 \cdot n)м$, $m_S = (0,10 + \frac{n}{10})м$;

2. $P=(27950{,}6+300\cdot n)м^2$, $m_P=(1{,}0+\frac{n}{10})м^2$;

де n – порядковий номер студента в списку групи.

Практична робота №3

ВРІВНОВАЖЕННЯ ГЕОДЕЗИЧНОЇ МЕРЕЖІ КОРЕЛАТНИМ МЕТОДОМ

Нехай в результаті вимірювань у геодезичній мережі отримано *n* величини $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з вагами $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Кількість виміряних величин має бути більшою за їх мінімальну необхідну кількість *k*. Позначимо невідомі врівноважені виміри як $x_1', x_2', \ldots, x_n'$.

Порядок врівноваження геодезичної мережі коре латним методом.

1. Визначають кількість надлишкових вимірів *r*, яка відповідає кількості умовних рівнянь геодезичної мережі:

$$r=n-k. \tag{15.1}$$

2. Складають умовні рівняння мережі у загальному виді:

$$f_j(x_1', x_2', \ldots, x_n')=0, \qquad j=1,\ldots,r. \tag{15.2}$$

Умовні рівняння мають бути незалежними між собою, мати якомога простіший вид і через них мають бути виражені усі виміряні величини.

3. Оскільки врівноважені геодезичні виміри x_i' невідомі, замінимо їх виміряними значеннями x_i та поправками до них v_i:

$$f_j(x_1+v_1, x_2+v_2, \ldots, x_n+v_n)=0 \tag{15.3}$$

4. У випадку, якщо умовні рівняння (15.3) мають нелінійний вид їх необхідно привести до лінійного з допомогою ряду Тейлора, обмежившись першим членом його розкладу аналогічно параметричному методу врівноваження (див. п.5 теоретичної частини лабораторної роботи №14):

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)v_1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)v_2+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)v_n=0$$

$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)v_1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)v_2+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)v_n=0 \tag{15.4}$$

…………………………………………………

$$f_r(x_1, x_2, ..., x_n) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)v_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)v_2 + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)v_n = 0$$

Вводять позначення:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = a_1, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = a_2 \quad ,..., \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = a_n,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = b_1, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = b_2 \quad ,..., \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = b_n,$$

(15.5)

………………………………………………

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = r_1 \quad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = r_2 \quad ,..., \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = r_n,$$

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = w_1, \quad f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = w_2, \quad f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = w_r, \qquad (15.6)$$

де w_i - нев'язка кожного умовного рівняння, яку можна легко вирахувати.

З урахуванням позначень (15.5) і (15.6) рівняння (15.4) має такий вид:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n + w_1 = 0$$

$$b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n + w_2 = 0 \qquad (15.7)$$

……………………………

$$r_1v_1 + r_2v_2 + ... + r_nv_n + w_r = 0.$$

Рівняння (15.7) називаються ***умовними рівняннями поправок***.

5. До умовних рівнянь поправок (15.7) накладають умову методу найменших квадратів

$$[pv^2] = p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + ... + p_nv_n^2 = \min. \qquad (15.8)$$

Їх сумісне розв'язання називається задачею на знаходження умовного екстремуму функції. Для цього до функції (15.8) додають умовні рівняння (15.7) почергово помножені на так звані неозначені множники Лагранжа $-2k_a, -2k_b, ..., -2k_r$.

$$F = p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + ... + p_nv_n^2 - 2a_1k_av_1 - 2a_2k_av_2 - ... - 2a_nk_av_n - 2w_1k_a -$$

$$- 2b_1k_bv_1 - 2b_2k_bv_2 - ... - 2b_nk_bv_n - 2w_2k_b - 2r_1k_rv_1 - 2r_2k_rv_2 - ... - 2r_nk_rv_n - 2w_rk_r$$

(15.9)

6. Для знаходження мінімуму функції (15.9) беруть часткові похідні по невідомими поправкам v_i і прирівнюють їх до нуля:

$$F_1' = 2p_1v_1 - 2a_1k_a - 2b_1k_b - ... - 2r_1k_r = 0$$

$$F_2' = 2p_1v_2 - 2a_2k_a - 2b_2k_b - ... - 2r_2k_r = 0 \tag{15.10}$$

………………………………………...

$$F_n' = 2p_1v_n - 2a_nk_a - 2b_nk_b - ... - 2r_nk_r = 0.$$

7. Знаходять поправки до виміряних геодезичних величини v_i із рівнянь (15.10):

$$v_1 = \frac{1}{p_1}(a_1k_a + b_1k_b + ... + r_1k_r)$$

$$v_2 = \frac{1}{p_2}(a_2k_a + b_2k_b + ... + r_2k_r) \tag{15.11}$$

………………………………

$$v_n = \frac{1}{p_n}(a_nk_a + b_nk_b + ... + r_nk_r).$$

В геодезії множники $k_a, k_b, \ldots, k_r$ називають ***корелатами***.

8. Для визначення невідомих корелат підставляють поправки (15.11) в умовні рівняння поправок (15.7). Для першого рівняння (15.7) будемо мати:

$$a_1\{\frac{1}{p_1}(a_1k_a + b_1k_b + ... + r_1k_r)\} +$$

$$a_2\{\frac{1}{p_2}(a_2k_a + b_2k_b + ... + r_2k_r)\} + \tag{15.12}$$

…………………………………

$$a_n\{\frac{1}{p_n}(a_nk_a + b_nk_b + ... + r_nk_r)\} + w_1 = 0.$$

Розкриваючи дужки рівняння (15.12) і підсумовуючи по корелатам, а також виконавши аналогічні операції для інших рівнянь (15.11) отримують:

$$\left[\frac{aa}{p}\right]k_a + \left[\frac{ab}{p}\right]k_b + ... + \left[\frac{ar}{p}\right]k_r - w_1 = 0$$

$$\left[\frac{ab}{p}\right]k_a + \left[\frac{bb}{p}\right]k_b + ... + \left[\frac{br}{p}\right]k_r - w_2 = 0 \tag{15.13}$$

……………………………………………….

$$\left[\frac{ar}{p}\right]k_a + \left[\frac{br}{p}\right]k_b + ... + \left[\frac{rr}{p}\right]k_r - w_3 = 0.$$

Рівняння (15.13) називаються ***нормальними рівняннями корелат***.

9. Розв’язуючи систему рівнянь (15.13) знаходять невідомі корелати $k_a, k_b, \ldots, k_r$. Розв’язування системи нормальних рівнянь методом Гаусса та

їх контроль детально розглянуті у лабораторній роботі №14 (пп.8 і 9 теоретичної частини).

10. Значення поправок до виміряних величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ знаходять підставивши отримані корелати в рівняння (15.11).

11. Отримують врівноважені геодезичні величини $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ додавши до виміряних величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ знайдені поправки $v_1, v_2, \ldots, v_n$:

$$x_i' = x_i + v_i \tag{15.14}$$

12. Оцінка точності.

12.1 Середня квадратична похибка одного виміру рівноточних вимірів або середня квадратична похибка одиниці ваги нерівноточних вимірів знаходиться аналогічно тому, як у параметричному методі врівноваження (п.11.1 лабораторної роботи №14):

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{r}}, \qquad \mu = \pm\sqrt{\frac{[pv^2]}{r}} . \tag{15.15}$$

Величини $[v^2]$ або $[pv^2]$ можна отримати двома способами:

- через знайдені поправки v_i рівняння (15.11) та відомі ваги вимірів p_i ;

- із рівняння

$$[pv^2] = -[wk] \tag{15.16}$$

12.2 Середня квадратична похибка функції врівноважених величин.

Функція врівноважених величин в корелатному методі має такий самий загальний вид як і умовні рівняння (15.7) після застосування ряду Тейлора для приведення функції до лінійного виду. Середня квадратична похибка функції врівноважених величин знаходиться за формулою:

$$m_F = \pm\mu\sqrt{\frac{1}{P_F}}, \tag{15.17}$$

де P_F - вага функції врівноважених величин.

Найпростіше вагу функції P_F знайти при розв'язанні нормальних рівнянь корелат шляхом додавання до схеми Гаусса стовпчика F з елементами $\left[\frac{aF}{p}\right], \left[\frac{bF}{p}\right], \ldots, \left[\frac{rF}{p}\right]$. В корелатному методі схема для складання нормальних рівнянь має такий самий вид, що і в параметричному способі, але з тією різницею, що стовпчик свобідних членів l заміняється на стовпчик F.

Приклад. Врівноважити корелатним методом мережу нівелювання представлену у розрахунково-графічній роботі. Отримати середню квадратичну похибку висоти точки *B* через перевищення h_2 і h_5 (вагова функція). Обчислити середню квадратичну похибку на 1км нівелірного ходу. Вихідні дані аналогічні лабораторній роботі №14.

1. Надлишкова кількість вимірів даної нівелірної мережі дорівнює 3:

$$r = n - k = 6 - 3 = 3.$$

Це значить, що для даної мережі потрібно скласти три умовні рівняння.

2. Складаємо умовні рівняння геодезичної мережі керуючись вимогами до них, які вказані у п.2 порядку врівноваження:

$v_1 + v_3 - v_2 + w_1 = 0$ - умовне рівняння полігонів

$v_4 - v_5 - v_3 + w_2 = 0$ - умовне рівняння полігонів (15.18)

$v_1 - v_2 + v_3 + w_3 = 0$ - умовне рівняння твердих реперів.

Можна було скласти й іншу систему умовних рівнянь, яка б задовольняла необхідні умови.

Усі рівняння системи (15.18) мають лінійний вид.

3. Визначаємо нев'язки кожного з рівнянь (15.18):

$$w_1 = h_1 + h_3 - h_2 = 6{,}721м + 2{,}164м - 8{,}858м = 0{,}027м$$

$$w_2 = h_4 - h_5 - h_3 = 5{,}898м - 3{,}729м - 2{,}164м = 0{,}005м \tag{15.19}$$

$$w_3 = H_{Рп2} - H_{Рп1} + h_2 + h_5 - h_6 = 8{,}858м + 3{,}729м - 7{,}513м = -0{,}007м$$

4. Складаємо рівняння вагової функції. Згідно умов завдання це висота точки В , яку отримують через перевищення h_2 і h_5:

$$F = H_B = H_{Рп1} + h_2' + h_5' = H_{Рп1} + h_2 + v_2 + h_5 + v_5 \tag{15.20}$$

Вагова функція також має лінійний вид.

5. Будуємо таблицю коефіцієнтів умовних рівнянь поправок та вагової функції *F* аналогічно параметричному методу врівноваження та обчислюємо коефіцієнти нормальних рівнянь корелат. Обернені значення ваг обчислюємо через довжини нівелірних ходів d_i в км:

$$\frac{1}{p_{ii}} = \frac{d_i}{\lambda}, \tag{15.21}$$

де λ - коефіцієнт пропорційності (для зручності обчислень $\lambda = 10$).

Таблиця 15.2 – Коефіцієнти лінійних рівнянь поправок

№ ходу	a	b	c	F	s	$\frac{1}{p}$	$\frac{a}{p}$	$\frac{b}{p}$	$\frac{c}{p}$	$\frac{F}{p}$	$\frac{s}{p}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	*10*	*11*	*12*
1	1	0	0	0	1	0,31	0,31	0	0	0	0,31

2	-1	0	1	1	1	0,91	-0,91	0	0,91	0,91	0,91
3	1	-1	0	0	0	0,62	0,62	-0,62	0	0	0
4	0	1	0	0	1	1,61	0	1,61	0	0	1,61
5	0	-1	1	1	1	1,25	0	-1,25	1,25	1,25	1,25
6	0	0	-1	0	-1	1,93	0	0	-1,93	0	-1,93
$\sum$	1	-1	1	2	3		0,02	-0,26	0,23	2,16	2,15

Таблиця 15.3 – Коефіцієнти нормальних рівнянь корелат.

№ ходу	$\frac{aa}{p}$	$\frac{ab}{p}$	$\frac{ac}{p}$	$\frac{aF}{p}$	$\frac{as}{p}$	$\frac{bb}{p}$	$\frac{bc}{p}$	$\frac{bF}{p}$	$\frac{bs}{p}$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1	0,31	0	0	0	0,31	0	0	0	0
2	0,91	0	-0,91	-0,91	-0,91	0	0	0	0
3	0,62	-0,62	0	0	0	0,62	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1,61	0	0	1,61
5	0	0	0	0	0	1,25	-1,25	-1,25	-1,25
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sum$	1,84	-0,62	-0,91	-0,91	-0,60	3,48	-1,25	-1,25	0,36

Продовження таблиці 15.3.

$\frac{cc}{p}$	$\frac{cF}{p}$	$\frac{cs}{p}$	$\frac{FF}{p}$	$\frac{Fs}{p}$	$\frac{ss}{p}$
11	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*
0	0	0	0	0	0,31
0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1,61
1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25
1,93	0	1,93	0	0	1,93
4,09	2,16	4,09	2,16	2,16	6,01

6. За даними таблиці 15.3 складаємо таблицю коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат:

Таблиця 15.4 – Таблиця коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат.

	$\left[\frac{a}{p}\right]$	$\left[\frac{b}{p}\right]$	$\left[\frac{c}{p}\right]$	$\left[\frac{F}{p}\right]$	$\left[\frac{s}{p}\right]$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
$[a$	1,84	-0,62	-0,91	-0,91	-0,6
$[b$		3,48	-1,25	-1,25	0,36
$[c$			4,09	2,16	4,09
$[F$				2,16	2,16
$[s$					6,01

7. Розв'язування системи нормальних рівнянь корелат за схемою Гаусса-Дулітля.

Таблиця 15.5 – Розв'язування системи нормальних рівнянь корелат

		$\left[\frac{a}{p}\right]$	$\left[\frac{b}{p}\right]$	$\left[\frac{c}{p}\right]$	$\left[\frac{F}{p}\right]$	$\left[\frac{s}{p}\right]$	W]	s′]
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
1	$[a$	1,8400	-0,6200	-0,9100	-0,9100	-0,6000	27,0000	26,4000
2	*e1*	-1,0000	0,3370	0,4946	0,4946	0,3261	-14,6739	-14,3478
3	$k_1 =$	***-19,0768***	-2,1747	-2,2282		-14,6739		
4	*[pb*		3,4800	-1,2500	-1,2500	0,3600	5,0000	5,3600
5	*П*		-0,2089	-0,3066	-0,3066	-0,2022	9,0978	8,8957
6	*[b.1*		3,2711	-1,5566	-1,5566	0,1578	14,0978	14,2557
7	*e2*		-1,0000	0,4759	0,4759	-0,0482	-4,3098	-4,3581
8	$k_2 =$	***-6,4539***		-2,1440		-4,3098		
9	*[c*			4,0900	2,1600	4,0900	-7,0000	-2,9100
10	*П*			-0,4501	-0,4501	-0,2967	13,3533	13,0565
11	*П1*			-0,7408	-0,7408	0,0751	6,7088	6,7839
12	*[c.2*			2,8992	0,9692	3,8684	13,0621	16,9304
13	*e3*			-1,0000	-0,3343	-1,3343	-4,5054	-5,8397
14	$k_3 =$	***-4,5054***				-4,5054		
15	*[F*				2,1600	2,1600		
16	*П*				-0,4501	-0,2967		
17	*П1*				-0,7408	0,0751		
18	*П2*				-0,3240	-1,2932		
19	*[F.4*				0,6452	0,6452		

$$\frac{1}{P_F} = 0,6452$$

8. Перевіряємо правильність розв'язання нормальних рівнянь корелат аналогічно параметричному методу врівноваження шляхом підстановки знайдених числових значень корелат у нормальні рівняння корелат (15.13). Якщо усі три рівняння дорівнюють нулю, то k_1, k_2 і k_3 знайдені вірно.

Таблиця 15.6 – Контроль правильності розв'язання системи нормальних рівнянь корелат

K	$\left[\frac{a}{p}\right]$	$\left[\frac{b}{p}\right]$	$\left[\frac{c}{p}\right]$	$\left[\frac{a}{p}\right]k_1$	$\left[\frac{b}{p}\right]k_2$	$\left[\frac{c}{p}\right]k_3$	W	Σ

	-19,0768	-6,4539	-4,5054					
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
$[a$	1,84	-0,62	-0,91	-35,1013	4,0014	4,0999	27,0000	0,0000
$[b$	-0,62	3,48	-1,25	11,8276	-22,4594	5,6318	5,0000	0,0000
$[c$	-0,91	-1,25	4,09	17,3599	8,0673	-18,4272	-7,0000	0,0000
$\sum$	0,31	1,61	1,93	-5,9138	-10,3907	-8,6955	25,0000	0,0000

9. Обчислення поправок до виміряних перевищень згідно рівнянь підставляючи числові значення корелат у рівняння (15.11).

Таблиця 15.7 – Обчислення поправок до виміряних перевищень *геодезичної мережі*

№ ходу	$\left[\frac{a}{p}\right]$	$\left[\frac{b}{p}\right]$	$\left[\frac{c}{p}\right]$	*v*	$\frac{1}{p}$	*pv*	Pv^2
	-19,0768	-6,4539	-4,5054				
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
1	0,31	0	0	-5,9	0,31	-19,077	112,8167
2	-0,91	0	0,91	13,3	0,91	14,571	193,2158
3	0,62	-0,62	0	-7,8	0,62	-12,623	98,7902
4	0	1,61	0	-10,4	1,61	-6,454	67,0601
5	0	-1,25	1,25	2,4	1,25	1,948	4,7454
6	0	0	-1,93	8,7	1,93	4,505	39,1769
W	27,0000	5,0000	-7,0000			*[pv²]*	515,8051
kW	-515,0739	-32,2693	31,5380			*[pv²]*	-515,8051

$$\sum_{i=1}^{3} kW_i = -515,8052$$

Контроль обчислень: $\left[pv^2\right] = -\sum_{i=1}^{3} kW_i$.

10. Знаходження врівноважені перевищення за формулою (15.14) а також висот вузлових точок А, В і С використовуючи схему нівелірної мережі (рис.14.1).

Таблиця 15.8– Обчислення врівноважених перевищень і висот вузловим точок.

№ Ходу	Значення перевищень в м			Значення висот в м		
	виміряні	поправки	врівноважені	репери	обчислення	Висота
1	6,721	-0,0059	6,7151	H_{Pn1}		128,373
2	8,858	0,0133	8,8713	H_{Pn2}		133,454

3	2,164	-0,0078	2,1562	H_A	$H_{Pn1}+h_1$	135,0881
4	5,898	-0,0104	5,8876	H_B	$H_{Pn2}+h_6$	140,9757
5	3,729	0,0024	3,7314	H_c	$H_{Pn1}+h_2$	137,2443
6	7,513	0,0087	7,5217			

11.Виконання оцінки точності:

- вирахування середньої квадратичної похибки одиниці ваги:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pv^2]}{r}} = \pm\sqrt{\frac{515{,}8051}{3}} = \pm 13{,}1\,мм;$$

- обчислення середньої квадратичної похибки функції врівноважених величин:

$$m_F = \pm\mu\sqrt{\frac{1}{P_F}} = \pm 13{,}1\sqrt{\frac{1}{0{,}6452}} = \pm 10{,}5\,мм$$

- знаходження середньої квадратичної похибки нівелювання на один кілометр ходу:

$$m_{1км} = \pm\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} = \pm\frac{13{,}1}{\sqrt{10}} = \pm 4{,}1\,мм$$

де λ коефіцієнт пропорційності, який прийняли рівним 10км.

Аналізуючи результати врівноваження нівелірної мережі зображеної на рис.14.1 параметричним та корелатним методами можна зробити висновок, що величини врівноважених величини та їх точність є однаковими.

Завдання.

Врівноважити корелатним методом нівелірну мережу зображену в розрахунково-графічній роботі на рисунку. Скласти вагову функцію – висоту вузлової точки В, отриману через перевищення h_2 і h_5 та середню квадратичну похибку нівелірного ходу довжиною 1км. Використати вихідні дані із лабораторної роботи №14. Оцінити точність наведеної нижче вагової функції. Здійснити порівняння результатів врівноваження геодезичної мережі параметричним (РГР) і корелатним (практична робота №3) методами.

Практична робота №4

Врівноваження лінійно-кутових геодезичних мереж корелатним методом

Розглянемо врівноваженні лінійно-кутових мереж корелатним методом на прикладі геодезичного чотирикутника. Геодезичним чотирикутником називається чотирикутник, який має дві діагоналі, вісім виміряних кутів між сторонами і діагоналями і одну базову сторону (рис.16.1). У лінійно-кутових мережах, на відміну від нівелірних, крім лінійних умовних рівнянь виникають і нелінійні.

Для побудови геодезичного чотирикутника мінімальна необхідна кількість вимірів – чотири (кути 1, 4, 5 і 8 на рис.16.1). Таким чином, у геодезичному чотирикутнику є чотири надлишкові виміри, які дозволяють скласти чотири умовні рівняння.

Розглянемо усі умовні рівняння, які виникають у наведеній лінійно-кутовій мережі.

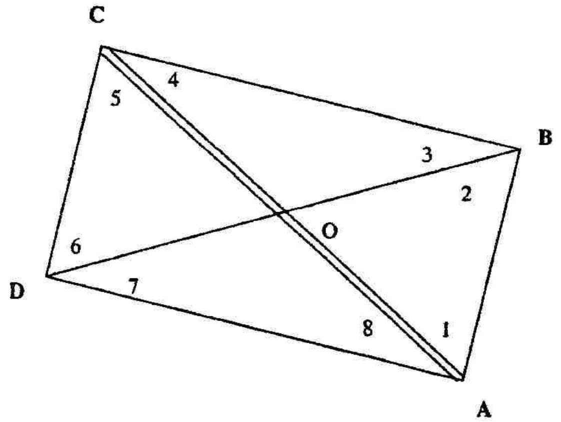

Рис.4.1 – Геодезичний чотирикутник.

1. Складання умовних рівнянь фігури (трикутника).

$f_1 = (3) + (4) + (5) + (6) = 0$ - трикутник BCD

$f_2 = (1) + (2) + (7) + (8) = 0$ - трикутник ABD

$f_3 = (5) + (6) + (7) + (8) = 0$ - трикутник ACD (4.1)

$f_4 = (1) + (2) + (3) + (4) = 0$ - трикутник ABC

$f_5 = (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7) + (8) = 0$ - чотирикутник ABCD.

У рівняннях (4.1) в круглих дужках позначені невідомі врівноважені кути.

Усі умовні рівняння мають бути незалежні між собою. Деякі з наведених вище геометричних умов є залежними:

$$f_1 + f_2 = f_3 + f_4$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 2f_5 \qquad (4.2)$$

Але, будь-які з трьох умовних рівнянь трикутників (4.1) (наприклад f_1, f_3, f_4) будуть незалежними між собою. Отже, в геодезичному чотирикутнику виникає три умовні рівняння фігури (трикутника). Остаточний вид умовних рівнянь трикутників, які виражені через виміряні кути 1, 2, …, 8 та невідомими поправками до них $v_1, v_2, \dots, v_8$ мають такий вид:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + w_1 = 0$$

$$v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + w_2 = 0 \qquad (4.3)$$

$$v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + w_3 = 0,$$

де нев’язки

$$w_1 = 180 - 1 - 2 - 3 - 4$$

$$w_2 = 180 - 3 - 4 - 5 - 6 \tag{4.4}$$

$$w_3 = 180 - 3 - 4 - 5 - 6$$

2. Складання полюсного умовного рівняння.

В геодезичному чотирикутнику можна скласти п’ять умовних полюсних рівнянь. Полюсні рівняння складають так. Візьмемо, наприклад, точку А за полюс і запишемо такі очевидні відношення сторін чотирикутника, які виходять з точки А:

$$\frac{AD}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{AD} = 1 \tag{4.5}$$

За теоремою синусів співвідношення (4.5) можна переписати у наступному виді замінивши довжини сторін на протилежні їм невідомі врівноважені кути трикутників:

$$\frac{\sin((6) + (7))\sin(4)\sin(2)}{\sin(5)\sin((2) + (3))\sin(7)} = 1 \tag{4.6}$$

Взявши за полюс відповідно вершини В, С, D або О можна скласти ще чотири умовні полюсні рівняння.

Враховуючи той факт, що врівноваження геодезичного чотирикутника достатньо взяти чотири умовні рівняння, то найпростішими незалежними рівняннями буде три рівняннями фігури і однем полюсне. Часто полюсне умовне рівняння складають з полюсом в точці перетину діагоналей чотирикутника (т.О на рис.4.1):

$$\frac{OA}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} \cdot \frac{OC}{OD} \cdot \frac{OD}{OA} = 1 \tag{4.7}$$

або замінивши довжини сторін синусами протилежних кутів:

$$\frac{\sin(1)\sin(3)\sin(5)\sin(7)}{\sin(2)\sin(4)\sin(6)\sin(8)} = 1 \tag{4.8}$$

Як бачимо, полюсні рівняння мають нелінійний вид і потребують лінеаризації. Лінеаризуємо полюсне рівняння (4.8). Замінимо невідомі врівноважені кути чотирикутника (1), (2),…, (8) виміряними кутами 1, 2, …, 8 та невідомими поправками до них $v_1, v_2, \dots, v_8$. Тоді полюсне рівняння буде мати такий вид:

$$\frac{\sin(1 + v_1)\sin(3 + v_3)\sin(5 + v_5)\sin(7 + v_7)}{\sin(2 + v_2)\sin(4 + v_4)\sin(6 + v_6)\sin(8 + v_8)} = 1 \tag{4.9}$$

Для лінеаризації рівняння (4.9) розкладемо його в ряд Тейлора (див. п.5 лабораторної роботи №14) і після зведення подібних доданків отримуємо остаточний вираз для полюсного рівняння нашого геодезичного чотирикутника:

$$\begin{gathered} ctg1 \cdot v_1 + ctg3 \cdot v_3 + ctg5 \cdot v_5 + ctg7 \cdot v_7 - ctg2 \cdot v_2 - ctg4 \cdot v_4 - ctg6 \cdot v_6 - \\ - ctg8 \cdot v_8 + w_4 = 0, \end{gathered} \tag{4.10}$$

де нев’язка w_4 дорівнює:

$$w_4 = \left(\frac{\sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7}{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8} - 1\right)\rho'' \qquad (4.11)$$

3. Складання вагової функції.

Для оцінки точності врівноваження будь-якої невідомої сторони чи діагоналі геодезичного чотирикутника складають вагову функцію. Для цього потрібно виразити довжину сторони, точність якої потрібно оцінити, через дану базову сторону, виміряні кути та невідомі до них поправки. Складемо вагову функцію для оцінки точності довжини діагоналі BD.

Із трикутника ABD за теоремою синусів знаходимо шукану довжину діагоналі BD:

$$\frac{BD}{\sin((1)+(8))} = \frac{AD}{\sin(2)}, \qquad BD = AD\frac{\sin((1)+(8))}{\sin(2)} \qquad (4.12)$$

З трикутника ACD виразимо довжину сторони з рівняння (4.12) через базову сторону AC:

$$\frac{AD}{\sin(5)} = \frac{AC}{\sin((6)+(7))}, \qquad AD = AC\frac{\sin(5)}{\sin((6)+(7))} \qquad (4.13)$$

Підставивши вираз (4.13) у вираз (4.12) отримуємо вагову функцію у загальному виді через невідомі врівноважені кути геодезичного чотирикутника:

$$BD = AC\frac{\sin((1)+(8))\sin(5)}{\sin(2)\sin((6)+(7))}. \qquad (4.14)$$

Виразимо вагову функцію (4.14) через наближені виміряні кути і невідомі поправки до них, які будуть отримані в результаті врівноваження:

$$F = BD = AC\frac{\sin(1+v_1+8+v_8)\sin(5+v_5)}{\sin(2+v_2)\sin(6+v_6+7+v_7)} \qquad (4.15)$$

Вагова функція має нелінійний вид, тому її потрібно лінеаризувати аналогічно умовному рівнянню полюса (4.9) шляхом розкладу в ряд Тейлора:

$$F = F_0\left(1 + ctg5 \cdot v_5 + ctg(1+8)\cdot(v_1+v_8) - ctg2 \cdot v_2 - ctg(6+7)\cdot(v_6+v_7\right), \qquad (4.16)$$

де

$$F_0 = AC\frac{\sin 5 \cdot \sin(1+8)}{\sin 2 \cdot \sin(6+7)}. \qquad (4.17)$$

Після лінеаризації умовного рівняння полюса та вагової функції обчислюють коефіцієнти лінійних рівнянь поправок та вагової функції, а також коефіцієнти системи нормальних рівнянь корелат згідно порядку. Подальше врівноваження геодезичного чотирикутника відбувається за стандартною процедурою розглянутою у лабораторній роботі №15.

<u>Приклад.</u> Скласти систему нормальних рівняння корелат для врівноваження геодезичного чотирикутника (рис.4.1). Для оцінки точності результатів врівноваження побудувати вагову функцію – довжину діагоналі BD.

Вихідні дані.

№ кута	Виміряні кути			№ кута	Виміряні кути		
	град.	мін.	сек.		град.	мін.	Сек..
1	27	14	19,23	5	52	35	52,74
2	56	46	6,54	6	31	24	37,36
3	64	8	25,03	7	38	21	43,35
4	31	51	7,10	8	57	37	49,64

Довжина вихідної сторони: S_{AC}=1235,947м

1. Складання умовних рівнянь трикутників.

Таблиця 4.1 – Умовні рівняння трикутників

Три-кутник	№ кута	Виміряні кути			Умовні рівняння в загальному виді	Умовні рівняння поправок
		град.	мін.	сек.		
ABC	1	27	14	19,23	(1)+(2)+(3)+(4)-180^0=0	$v_1+v_2+v_3+v_4-2{,}10=0$
	2	56	46	6,54		
	3	64	8	25,03		
	4	31	51	7,10		
	$\sum$	179	59	57,90		
	w_1			***-2,10***		
BCD	3	64	8	25,03	(3)+(4)+(5)+(6)-180^0=0	$v_3+v_4+v_5+v_6-2{,}10=0$
	4	31	51	7,10		
	5	52	35	52,74		
	6	31	24	37,36		
	$\sum$	180	00	02,23		
	w_2			***2,23***		
CDA	5	52	35	52,74	(5)+(6)+(7)+(8)-180^0=0	$v_5+v_6+v_7+v_8-3{,}09=0$
	6	31	24	37,36		
	7	38	21	43,35		
	8	57	37	49,64		
	$\sum$	180	00	03,09		
	w_3			***3,09***		

2. Складання полюсного рівняння (полюс в т.О).

Полюсне рівняння у загальному виді:

$$\frac{\sin 1\cdot\sin 3\cdot\sin 5\cdot\sin 7}{\sin 2\cdot\sin 4\cdot\sin 6\cdot\sin 8}-1=w_4.$$

Нев'язка полюсного рівняння в кутовій мірі:

$$w_4=(1-\frac{\sin 1\cdot\sin 3\cdot\sin 5\cdot\sin 7}{\sin 2\cdot\sin 4\cdot\sin 6\cdot\sin 8})\rho''.$$

Таблиця 4.2 – Обчислення коефіцієнтів полюсного рівняння поправок і нев’язки

№ Кута	Виміряні кути Град.	мін.	сек.	*sin* кута	*ctg* кута	Значення Коефіцієнтів
1	22	14	19,23	0,378465669	2,4457	***2,45***
3	69	8	25,03	0,934455075	0,3811	***0,38***
5	52	35	52,74	0,794393242	0,7646	***0,76***
7	38	21	43,35	0,620628449	1,2634	***1,26***
$\prod$				0,174362119		
2	56	46	6,54	0,836462989	0,6552	***0,66***
4	31	51	7,1	0,527726505	1,6096	***1,61***
6	26	24	37,36	0,444797409	2,0136	***2,01***
8	62	37	49,64	0,888059879	0,5177	***0,52***
$\prod$				0,174366105		
			w_4	***-3,80***		

Лінеаризоване умовне полюсне рівняння поправок до виміряних кутів:

$$2{,}45v_1 - 0{,}66v_2 + 0{,}38v_3 - 1{,}61v_4 + 0{,}76v_5 - 2{,}01v_6 + 1{,}26v_7 - 0{,}52v_8 - 3{,}80 = 0\,.$$

3. Побудова вагової функції – довжина лінії BD.

Рівняння вагової функції:

$$F = BD = AC\,\frac{\sin(1 + v_1 + 8 + v_8)\sin(5 + v_5)}{\sin(2 + v_2)\sin(6 + v_6 + 7 + v_7)}.$$

Таблиця 4.3 – Обчислення коефіцієнтів вагової функції

№ Кута	Виміряні кути град.	мін.	сек.	*Sin* Кута	*ctg* кута	Значення коефіцієнтів
5	52	35	54,94	0,794399720	0,7646	***0,76***
1+8	84	52	08,87	0,995993027	0,0898	***0,09***
			$\prod$	0,79121013		
2	56	46	7,94	0,836466709	0,6552	***0,66***
6+7	64	47	20,71	0,90462199	0,4712	***0,47***
			$\prod$	0,756682813		
			F_0	***1292,3431***		

Лінеаризоване рівняння вагової функції:

$$F = F_0\left(1 + 0{,}76v_5 + 0{,}09(v_1 + v_8) - 0{,}66v_2 - 0{,}47(v_6 + v_7)\right),$$

де $F_0 = AC \dfrac{\sin 5 \cdot \sin(1+8)}{\sin 2 \cdot \sin(6+7)} = 1292{,}3431 м$.

4. Обчислення коефіцієнтів умовних лінійних рівнянь поправок та вагової функції.

Таблиця 4.4 –Коефіцієнти умовних рівнянь поправок та вагової функції

№ кута	a	b	c	d	F	s
1	1	0	0	2,45	0,09	3,54
2	1	0	0	-0,66	-0,66	-0,31
3	1	1	0	0,38	0	2,38
4	1	1	0	-1,61	0	0,39
5	0	1	1	0,76	0,76	3,53
6	0	1	1	-2,01	-0,47	-0,48
7	0	0	1	1,26	-0,47	1,79
8	0	0	1	-0,52	0,09	0,57
$\sum$	4	4	4	0,06	-0,65	11,41

5. Обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат.

Таблиця 4.5 –Коефіцієнти нормальних рівнянь корелат

	$a]$	$b]$	$c]$	$d]$	$F]$	$s]$
$[a$	4	2	0	0,56	-0,57	6,00
$[b$		4	2	-2,48	0,29	5,82
$[c$			4	-0,50	-0,09	5,41
$[d$				15,65	1,54	14,77
$[F$					1,47	2,65
$[s$						34,65

6. Система нормальних рівнянь корелат має наступний вид:

$$4k_1 + 2k_2 + 0{,}56k_4 - 2{,}10 = 0$$
$$2k_1 + 4k_2 + 2k_3 - 2{,}48k_4 + 2{,}23 = 0$$
$$2k_2 + 4k_3 - 0{,}50k_4 + 3{,}09 = 0$$
$$0{,}56k_1 - 2{,}48k_2 - 0{,}50k_3 + 15{,}65k_4 - 3{,}80 = 0.$$

Завдання.

Скласти систему нормальних рівняння корелат для врівноваження геодезичного чотирикутника зображеного на рис.16.1. Побудувати вагову функцію – довжину сторони BD.

Вихідні дані.

	Величина кута								
			секунди						
			Варіант						
			1	2	3	4	5	6	7
1	53	18	56,89	56,47	59,76	55,34	58,34	57,30	59,12
2	43	38	48,15	47,33	47,74	47,82	47,25	50,02	45,98
3	27	11	19,76	20,42	20,45	22,54	19,33	20,64	19,13
4	55	50	54,32	55,06	52,21	54,89	54,72	53,18	53,76
5	75	52	19,09	17,35	18,36	18,09	18,75	20,47	20,22
6	21	5	23,54	24,78	25,04	23,32	23,78	23,75	23,47
7	28	12	52,60	51,09	52,33	52,16	54,08	51,88	52,45
8	54	49	25,55	24,27	25,07	26,12	25,31	23,36	25,04
S_{AC} в м			956,325	1547,587	1067,478	874,562	2476,605	875,5630	3684,006

	Величина кута								
			секунди						
			Варіант						
			8	9	10	11	12	13	14
1	53	18	54,73	56,12	54,77	55,24	57,12	56,75	55,88
2	43	38	50,04	50,07	51,3	50,66	49,44	48,33	47,35
3	27	11	19,47	20,26	19,89	19,5	19,00	19,05	20,31
4	55	50	56,72	56,45	51,32	54,67	55,68	54,67	54,15
5	75	52	18,34	18,18	22,48	20,18	18,03	19,12	21,87
6	21	5	21,54	22,8	23,34	22,75	24,54	24,78	23,54
7	28	12	53,11	52,98	52,6	55,62	54,12	53,64	52,33
8	54	49	27,87	22,87	23,55	24,55	23,57	23,59	24,48
S_{AC} в м			1500,851	3862,408	2276,507	978,006	3366,985	689,972	1357,848

	Величина кута							
			секунди					
			Варіант					
			15	16	17	18	19	20
1	53	18	54,98	57,45	57,57	58,11	56,16	54,63
2	43	38	48,03	49,34	48,35	47,34	49,03	50,11
3	27	11	19,55	19,76	19,34	19,46	20,75	21,04
4	55	50	55,63	53,97	56,02	54,00	53,54	55,18
5	75	52	19,57	18,76	18,39	21,05	19,09	19,50
6	21	5	22,77	24,05	22,78	22,67	24,46	22,76
7	28	12	52,22	52,54	52,45	52,60	53,21	53,45
8	54	49	26,72	25,33	26,38	25,38	25,21	26,07
S_{AC} в м			3457,389	876,492	2678,417	956,325	2489,007	1589,562